CQ - CORPS COMMUTATIF TOTALEMENT ORDONNE AXIOMES DE DEFINITION DE $\mathbb{R}$

I. Anneaux ordonnés

Soit $\mathbb{A}$ un anneau, et $\mathbb{A}^+$ un sous-ensemble non vide de cet anneau. On note $\mathbb{A}^-$ l'ensemble des opposés des éléments de $\mathbb{A}^+$. On définit alors des relations binaires notées $\leq$ et $\geq$ par

$$x \leq y \iff y \geq x \iff y - x \in \mathbb{A}^+ .$$

Donc par définition

$$x \geq 0 \iff x \in \mathbb{A}^+ ,$$

$$x \leq 0 \iff -x \in \mathbb{A}^+ \iff x \in \mathbb{A}^- .$$

A partir de la relation $\leq$ on définira les relations $<$ et $>$ par

$$x < y \iff y > x \iff (x \leq y \text{ et } x \neq y) \iff y - x \in \mathbb{A}^+ \setminus \{0\} .$$

Le vocabulaire usuel sera utilisé. Un nombre positif sera par exemple un élément de $\mathbb{A}^+$ et on dira aussi qu'il est de signe positif, etc...

On remarque aussi que

$$x + a \leq y + a \iff y - x \in \mathbb{A}^+ \iff x \leq y .$$

On dira alors que la relation $\leq$ est **compatible avec l'addition**.

Définition 1 On dira que la relation $\leq$ est **compatible avec la multiplication** lorsque, quels que soient x, y dans $\mathbb{A}$ et a dans $\mathbb{A}^+$, la relation $x \leq y$ implique

$$xa \leq ya \quad \text{et} \quad ax \leq ay .$$

Caractérisation des diverses propriétés de $\leq$

Proposition 1
1) $\leq$ est réflexive si et seulement si $\mathbb{A}^+$ contient 0.
2) $\leq$ est antisymétrique et réflexive si et seulement si $\mathbb{A}^+ \cap \mathbb{A}^- = \{0\}$.
3) $\leq$ est transitive si et seulement si $\mathbb{A}^+$ est stable par addition.
4) $\leq$ est totale si et seulement si $\mathbb{A}^+ \cup \mathbb{A}^- = \mathbb{A}$.
5) $\leq$ est compatible avec la multiplication si et seulement si $\mathbb{A}^+$ est stable par multiplication.

CQ 2

1) Dire que $\mathbb{A}^+$ contient 0 signifie que, pour tout x de $\mathbb{A}$, on a $x-x \geq 0$, donc que $x \leq x$, c'est-à-dire que la relation $\leq$ est réflexive.

2) Si la relation $\leq$ est antisymétrique et réflexive, tout d'abord 0 appartient à $\mathbb{A}^+$, d'après 1). Il appartient aussi à $\mathbb{A}^-$, donc à $\mathbb{A}^+ \cap \mathbb{A}^-$. Ensuite, si x appartient à $\mathbb{A}^+ \cap \mathbb{A}^-$, on a

$$x \leq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq x\,,$$

et il en résulte que x est nul. Alors

$$\mathbb{A}^+ \cap \mathbb{A}^- = \{0\}\,.$$

Réciproquement, si l'on a

$$\mathbb{A}^+ \cap \mathbb{A}^- = \{0\}\,,$$

et si l'on a à la fois

$$y \leq x \quad \text{et} \quad x \leq y$$

alors

$$0 \leq y - x \quad \text{et} \quad 0 \leq x - y\,,$$

ce qui signifie que $y - x$ appartient à $\mathbb{A}^+ \cap \mathbb{A}^-$, et donc $y - x$ est nul. Alors $x = y$ et la relation est antisymétrique. Par ailleurs 0 est dans $\mathbb{A}^+$ donc la relation est réflexive.

3) Si la relation $\leq$ est transitive, soit x et y dans $\mathbb{A}^+$. On a alors

$$-y \leq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq x\,,$$

et donc par transitivité

$$-y \leq x\,,$$

ce qui montre que $x + y$ appartient à $\mathbb{A}^+$. Cet ensemble est stable par addition.

Réciproquement, si $\mathbb{A}^+$ est stable par addition, et si l'on a

$$x \leq y \quad \text{et} \quad y \leq z\,,$$

alors

$$y - x \in \mathbb{A}^+ \quad \text{et} \quad z - y \in \mathbb{A}^+\,,$$

donc

$$(y - x) + (z - y) = z - x$$

est un élément de $\mathbb{A}^+$, et finalement

$$x \leq z\,.$$

La relation est transitive.

4) Si la relation $\leq$ est totale, soit x dans $\mathbb{A}$, alors, où bien $x \leq 0$, et alors x appartient à $\mathbb{A}^-$, ou bien $0 \leq x$ et x appartient à $\mathbb{A}^+$. Donc x appartient à la réunion $\mathbb{A}^+ \cup \mathbb{A}^-$. Ce qui donne

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^+ \cup \mathbb{A}^-\,.$$

Réciproquement, si

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^+ \cup \mathbb{A}^- ,$$

et si x et y sont dans $\mathbb{A}$, ou bien $x - y$ est dans $\mathbb{A}^+$ et $y \leq x$, ou bien $x - y$ est dans $\mathbb{A}^-$ et $x \leq y$. La relation est bien totale.

5) Supposons la relation $\leq$ compatible avec la multiplication. Si l'on a

$$0 \leq x \quad \text{et} \quad 0 \leq a ,$$

on en déduit $0 \leq xa$, et $\mathbb{A}^+$ est stable par multiplication.

Réciproquement, si $\mathbb{A}^+$ est stable par multiplication, et si $x \leq y$, alors $y - x$ est dans $\mathbb{A}^+$, donc $a(y - x) = ay - ax$ également. Il en résulte que

$$ax \leq ay .$$

De même $(y - x)a = ya - xa$ est dans $\mathbb{A}^+$ donc

$$xa \leq ya ,$$

et la relation est compatible avec la multiplication.

Conséquences :

Proposition 2
1) si $\mathbb{A}^+$ est stable par addition $x \leq y$ et $z \leq t$ impliquent $x + z \leq y + t$.
2) si $\mathbb{A}^+$ est stable par addition et par multiplication $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq z \leq t$ impliquent $xz \leq yt$.

1) On a

$$x + z \leq y + z \quad \text{et} \quad y + z \leq y + t ,$$

et puisque $\leq$ est transitive, on en déduit

$$x + z \leq y + t .$$

2) La relation $\leq$ est compatible avec le produit, donc

$$xz \leq yz \quad \text{et} \quad yz \leq yt ,$$

et $\leq$ est transitive donc

$$xz \leq yt .$$

CQ 4

Anneau totalement ordonné

DÉFINITION 2 On dit qu'un anneau est **totalement ordonné** s'il est muni d'une relation d'ordre totale compatible avec l'addition et la multiplication.

Il résulte de ce qui précède, la propriété suivante :

PROPOSITION 3 Si $\mathbb{A}$ est un anneau muni d'une relation d'ordre, et si $\mathbb{A}^+$ est l'ensemble des nombres positifs de cet anneau, alors $\mathbb{A}$ est totalement ordonné si et seulement si $\mathbb{A}^+$ est une partie stable par addition et par multiplication, et telle que

$$\mathbb{A}^+ \cap \mathbb{A}^- = \{0\} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}^+ \cup \mathbb{A}^- = \mathbb{A}\,.$$

Inversement toute partie $\mathbb{A}^+$ stable par addition et par multiplication, et telle que

$$\mathbb{A}^+ \cap \mathbb{A}^- = \{0\} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}^+ \cup \mathbb{A}^- = \mathbb{A}$$

définit une relation d'ordre sur $\mathbb{A}$ faisant de $\mathbb{A}$ un anneau totalement ordonné.

Conséquences :

PROPOSITION 4 Dans un anneau totalement ordonné
1) La règle des signes est valable pour un produit.
2) Quel que soit x dans $\mathbb{A}$, on a $x^2 \geq 0$.
3) L'élément unité de l'anneau est positif.
4) Si x est inversible, alors x et $1/x$ sont de même signe.

1) Si x et y sont négatifs, $-x$ et $-y$ sont positifs donc $(-x)(-y) = xy$ est positif.
Si x est positif, et y négatif, x et $-y$ sont positifs, donc $-xy = x(-y)$ aussi, et xy est négatif.
Même chose si x est négatif et y positif.

2) Il résulte de ce qui précède que x^2 est positif.

3) En particulier $\mathbb{1} = \mathbb{1}^2$ est positif.

4) Si x et $1/x$ étaient de signes opposés, le produit $\mathbb{1}$ serait négatif d'où une contradiction.

Remarque : il résulte de ce qui précède, que $\mathbb{A}^+$ contient tous les carrés. On en déduit que $\mathbb{C}$ n'est pas totalement ordonnable, puisque l'on aurait $\mathbb{C} = \mathbb{C}^+$.

Dans un anneau totalement ordonné, on peut alors définir la notion d'**intervalle**. Par exemple

$$[a,\, b] = \{x \in \mathbb{A} \,|\, a \leq x \leq b\} \quad , \quad]\,a,\, b] = \{x \in \mathbb{A} \,|\, a < x \leq b\} \quad , \quad [a,\, +\infty[\, = \{x \in \mathbb{A} \,|\, a \leq x\}\,.$$

On peut définir également les notions d'ensemble majoré et minoré, de borne supérieure et inférieure d'une partie de $\mathbb{A}$. Par exemple
Un partie P de $\mathbb{A}$ est majorée, s'il existe M dans $\mathbb{A}$ tel que, pour tout x de $\mathbb{A}$, on ait $x \leq M$.

Un majorant s de $\mathbb{A}$ qui est plus petit que tous les autres majorants de $\mathbb{A}$ est la borne supérieure de $\mathbb{A}$. (Si elle existe elle est unique).

Proposition 5 Un anneau (unitaire) totalement ordonné est de caractéristique nulle.

Notons $\mathbb{1}$ le neutre de l'anneau. Puisque $0 \leq \mathbb{1}$, on a alors pour tout entier n, la relation

$$n\,\mathbb{1} \leq n\,\mathbb{1} + \mathbb{1}\,,$$

et donc, pour tout entier $n \geq 1$, on obtient

$$n\,\mathbb{1} \geq \mathbb{1}\;.$$

Si l'anneau est de caractéristique $p \neq 0$, on a en particulier

$$0 = p\,\mathbb{1} \geq \mathbb{1}\;.$$

et finalement, en raison de l'antisymétrie,

$$0 = \mathbb{1}\,,$$

d'où une contradiction.

Morphisme d'anneaux totalement ordonnés

Définition 3 On se donne deux anneaux totalement ordonnés $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}'$. On appelle **morphisme** une application σ de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{A}'$ qui soit un morphisme d'anneaux et compatible avec la relation d'ordre, c'est-à-dire une application vérifiant, quels que soient x et y dans $\mathbb{A}$
(i) $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$,
(ii) $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$,
(iii) $\sigma(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$,
(iv) si $x \leq y$ alors $\sigma(x) \leq \sigma(y)$.

CQ 6

PROPOSITION 6 Une application σ de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{A}'$ est un morphisme d'anneau totalement ordonnés si et seulement si on a les propriétés
(i') quels que soient x et y dans $\mathbb{A}^{+*}$, $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$,
(i") quels que soit x dans $\mathbb{A}^{+}$, $\sigma(-x) = -\sigma(x)$,
(ii') quels que soient x et y dans $\mathbb{A}^{+*}$, $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$,
(iii') $\sigma(\mathbb{1})$ est inversible,
(iv') si $x > 0$, alors $\sigma(x) > 0$.

Il est clair que les propriétés primes sont des conséquences de la définition. Etudions la réciproque.

On a comme cas particulier de (i"),

$$\sigma(0) = -\sigma(0)\,,$$

et donc, puisque $\mathbb{A}'$ est de caractéristique nulle,

$$\sigma(0) = 0\,.$$

Alors, quels que soient x et y dans $\mathbb{A}^{+}$,

$$\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)\,.$$

(i) Si x et y sont négatifs $x+y$ est négatif et $-x$, $-y$, $-(x+y)$ sont positifs, donc

$$\sigma(x+y) = -\sigma((-x)+(-y)) = -(\sigma(-x)+\sigma(-y)) = -(-\sigma(x)) + (-\sigma(y)) = \sigma(x) + \sigma(y)\,,$$

Si $x \geq 0$, $y \leq 0$ et $x+y \geq 0$, on a $x = (x+y) + (-y)$, donc

$$\sigma(x) = \sigma(x+y) + \sigma(-y) = \sigma(x+y) - \sigma(y)\,,$$

d'où

$$\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)\,.$$

Méthode analogue dans les autres cas.

(ii) Si x et y sont négatifs

$$\sigma(xy) = \sigma((-x)(-y)) = \sigma(-x)\sigma(-y) = (-\sigma(x))(-\sigma(y)) = \sigma(x)\sigma(y)\,,$$

et si x est positif et y négatif

$$\sigma(xy) = -\sigma(x(-y)) = -\sigma(x)\sigma(-y) = \sigma(x)\sigma(y)\,.$$

(iii) On a

$$\sigma(\mathbb{1}) = \sigma(\mathbb{1}^2) = \sigma(\mathbb{1})^2\,,$$

donc si $\sigma(\mathbb{1})$ est inversible,

$$\sigma(\mathbb{1}) = \mathbb{1}\,.$$

(iv) Si $x \leq y$, alors $y - x$ est positif et donc

$$\sigma(y-x) = \sigma(y) - \sigma(x) \geq 0\,.$$

Finalement

$$\sigma(x) \leq \sigma(y)\,.$$

Valeur absolue sur un anneau totalement ordonné

Définition 4 Si a est dans $\mathbb{A}$, on définit la **valeur absolue** de a notée $|a|$, de la manière suivante

$$|a| = \left\{ \begin{array}{ll} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{array} \right. .$$

Elle vérifie les propriétés usuelles de la valeur absolue. Remarquons tout d'abord que $|a| = 0$ si et seulement si $a = 0$ et que $-|a| \leq a \leq |a|$. Par ailleurs on a encore l'équivalence

$$|x| \leq a \quad \Longleftrightarrow \quad -a \leq x \leq a\,.$$

En raison de la règle des signes, on a :

$$\boxed{|a \cdot b| = |a| \cdot |b|}$$

et

$$\boxed{|a^{-1}| = |a|^{-1}}$$

Puis on a l'inégalité triangulaire :

$$\boxed{|a+b| \leq |a| + |b|}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si a et b sont de même signe

Si a et b sont positifs, il en est de même de $a + b$, et

$$|a+b| = a + b = |a| + |b|\,.$$

De même si a et b sont négatifs

$$|a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|\,.$$

Si a et b ont le même signe. Il y a donc égalité.

Si $a \leq 0 \leq b$ et $a + b \geq 0$

$$|a+b| = a + b = -|a| + |b| \leq |a| + |b|\,.$$

Si $a \leq 0 \leq b$ et $a+b \leq 0$
$$|a+b| = -(a+b) = |a| - |b| \leq |a| + |b|\,.$$
En permutant les rôles de a et b on a encore l'inégalité désirée si $b \leq 0 \leq a$. On constate également que si a ou b n'est pas nul, il ne peut y avoir égalité dans les derniers cas.

Conséquence :
$$\boxed{|a+b| \geq \Big|\,|a| - |b|\,\Big|}$$
On écrit $a = a + b - b$. Alors
$$|a| = |(a+b) - b| \leq |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|\,,$$
d'où
$$|a| - |b| \leq |a+b|\,.$$
En permutant les rôles de a et b, on a également
$$|b| - |a| \leq |a+b|\,.$$
D'où
$$\Big|\,|a| - |b|\,\Big| = \max(|a| - |b|, |b| - |a|) \leq |a+b|\,.$$
Les inégalités triangulaires peuvent s'écrire aussi pour les différences puisque $a - b = a + (-b)$, ce qui donne
$$\boxed{\Big|\,|a| - |b|\,\Big| \leq |a-b| \leq |a| + |b|}$$

II. Corps commutatif totalement ordonné

Nous supposons désormais que l'anneau commutatif totalement ordonné est un corps $\mathbb{K}$, et nous notons respectivement $\mathbb{K}^+$ et $\mathbb{K}^-$ l'ensemble des nombres positifs et l'ensemble des nombres négatifs.

Proposition 7 Si x et y sont deux éléments non nuls de $\mathbb{K}$, alors si x et y ont le même signe, et si $x \leq y$, on a $y^{-1} \leq x^{-1}$.

En effet
$$x^{-1} - y^{-1} = (y-x)x^{-1}y^{-1}\,,$$
et puisque x^{-1} et y^{-1} ont le même signe, leur produit est positif. Par suite $x^{-1} - y^{-1}$ et $y - x$ ont le même signe.

Proposition 8 Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif totalement ordonné, on définit une application σ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{K}$ en associant à p/q l'élément $(p\,\mathbb{1})(q\,\mathbb{1})^{-1}$ de $\mathbb{K}$. Cette application est alors un morphisme injectif de corps ordonnés, et le corps $\mathbb{K}$ contient donc un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$.

Soit p/q et p'/q' deux éléments de $\mathbb{Q}$. Evaluons la différence

$$\alpha = (p\,\mathbb{1})(q\,\mathbb{1})^{-1} - (p'\,\mathbb{1})(q'\,\mathbb{1})^{-1}\,.$$

En multipliant par $q\,\mathbb{1}\,q'\,\mathbb{1}$ on trouve, en raison de la commutativité du produit,

$$(q\,\mathbb{1})(q'\,\mathbb{1})\alpha = (p\,\mathbb{1})(q'\,\mathbb{1}) - (p'\,\mathbb{1})(q\,\mathbb{1}) = (pq' - p'q)\,\mathbb{1}\,.$$

Alors si les nombres p/q et p'/q' sont égaux, on en déduit que α est nul, et donc

$$(p\,\mathbb{1})(q\,\mathbb{1})^{-1} = (p'\,\mathbb{1})(q'\,\mathbb{1})^{-1}\,.$$

On définit bien une application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{K}$ en posant

$$\sigma(p/q) = (p\,\mathbb{1})(q\,\mathbb{1})^{-1}\,.$$

Inversement si α est nul, on en déduit que $pq' - qp'$ est nul, donc que les nombres p/q et p'/q' sont égaux, ce qui montre que σ est injective.

On a alors

$$\sigma(p/q) + \sigma(p'/q') = (p\,\mathbb{1})(q\,\mathbb{1})^{-1} + (p'\,\mathbb{1})(q'\,\mathbb{1})^{-1}\,.$$

En multipliant par $(qq')\,\mathbb{1} = (q\,\mathbb{1})(q'\,\mathbb{1})$, on trouve

$$((qq')\,\mathbb{1})(\sigma(p/q) + \sigma(p'/q')) = (p\,\mathbb{1})(q'\,\mathbb{1}) + (p'\,\mathbb{1})(q\,\mathbb{1}) = (pq' + qp')\,\mathbb{1}\,,$$

donc

$$\sigma(p/q) + \sigma(p'/q') = (pq' + qp')\,\mathbb{1}((qq')\,\mathbb{1})^{-1}\,.$$

Mais

$$\sigma(p/q + p'/q') = \sigma[(pq' + qp')/qq'] = [(pq' + qp')\,\mathbb{1}][(qq')\,\mathbb{1}]^{-1}\,,$$

et finalement

$$\sigma(p/q + p'/q') = \sigma(p/q) + \sigma(p'/q')\,.$$

La démonstration est analogue pour le produit.

Enfin, si p et q sont positifs, les nombres $p\,\mathbb{1}$ et $q\,\mathbb{1}$ sont positifs, donc $(q\,\mathbb{1})^{-1}$ également, ainsi que $(p\,\mathbb{1})(q\,\mathbb{1})^{-1}$. Alors, si x et y sont dans $\mathbb{Q}$, et si $x \leq y$, on a $y - x \geq 0$, donc

$$\sigma(y - x) = \sigma(y) - \sigma(x) \geq 0\,,$$

et finalement

$$\sigma(x) \leq \sigma(y)\,.$$

Notations : si q est un entier non nul, et x un élément de $\mathbb{K}$, nous noterons, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, x/q l'élément $x(q\,\mathbb{1})^{-1} = x\sigma(1/q)$, et si x et y sont dans $\mathbb{K}$ ($y \neq 0$), le produit xy^{-1} sera noté x/y.

CQ 10

Suite dans un corps commutatif totalement ordonné

On peut définir la notion de suite croissante, de suite décroissante, de suite majorée etc... de la manière habituelle. Par exemple une suite est

croissante lorsque
$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (u_n \leq u_{n+1})\,,$$
majorée lorsque
$$(\exists M \in \mathbb{K})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (u_n \leq M)\,.$$

Convergence dans un corps commutatif totalement ordonné

On peut alors définir la convergence d'une suite de la manière usuelle.

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ **converge** vers ℓ lorsque
$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists q \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ((n \geq q) \Rightarrow (|u_n - \ell| \leq \varepsilon))\,.$$
La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ admet $+\infty$ comme limite lorsque
$$(\forall A \in \mathbb{K})\ (\exists q \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ((n \geq q) \Rightarrow (u_n \geq A))\,,$$
et tous les théorèmes classiques sur les limites restent valables :

– Unicité de la limite,
– Une suite convergente est bornée,
– Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient,
– Passage à la limite dans les inégalités,
– Existence d'une limite par comparaison,
– Limite et suites extraites,
– Une suite croissante n'est pas majorée si et seulement elle admet pour limite $+\infty$.

On peut définir aussi la notion de **suite de Cauchy** :

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy lorsque
$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{K}^{*+})\ (\exists q \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall m \in \mathbb{N})\ ((n \geq q) \text{ et } (m \geq q) \Rightarrow (|u_n - u_m| \leq \varepsilon))\,.$$
– Une suite convergente est une suite de Cauchy,
– Une suite de Cauchy est bornée.

On définit également les notions de suites adjacentes :
Deux suites u et v sont dites **adjacentes**, lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante, et lorsque la suite $v - u$ converge vers 0.

On a les deux propriétés sur les suites extraites suivantes :

> PROPOSITION 9
> 1) Si une suite monotone u admet une suite extraite de limite ℓ, alors u admet comme limite ℓ.
> 2) Si une suite de Cauchy u admet une suite extraite qui converge vers ℓ, alors u converge vers ℓ.

1) Supposons u croissante et ℓ finie. Puisque $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, il existe un entier q, tel que, quel que soit $n \geq q$, on ait
$$|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon\,.$$
donc
$$\ell - \varepsilon \leq u_{\varphi(n)} \leq \ell\,.$$
Si on a $p \geq \varphi(q)$, il existe un entier n tel que
$$\varphi(q) \leq \varphi(n) \leq p \leq \varphi(n+1)\,,$$
et donc
$$u_{\varphi(q)} \leq u_{\varphi(n)} \leq u_p \leq u_{\varphi(n+1)}\,.$$
On en déduit
$$\ell - \varepsilon \leq u_p \leq \ell,$$
soit
$$|u_p - \ell| \leq \varepsilon\,,$$
ce qui montre que la suite u converge vers ℓ.

Démonstration analogue si ℓ est infinie.

Si u est décroissante, on applique ce qui précède à $-u$.

2) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque u est une suite de Cauchy, il existe un entier q, tel que, quels que soient les entiers n et m supérieurs à q, on ait
$$|u_n - u_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$
Puisque $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, il existe un entier q', tel que, quel que soit l'entier $m \geq q'$, on ait
$$|u_{\varphi(m)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$
Alors si n et m sont supérieurs à $\max(q, q')$, on a également $\varphi(m) \geq m \geq q$, et
$$|u_n - u_{\varphi(m)}| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$
En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient, si $n \geq \max(q, q')$
$$|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{\varphi(m)}| + |u_{\varphi(m)} - \ell| \leq \varepsilon\,.$$

Corps archimédien

Définition 5 Un corps totalement ordonné est **archimédien**, s'il vérifie l'axiome d'Archimède : quels que soient $x > 0$ et $y \geq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx \geq y$.

Proposition 10 Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif totalement ordonné, l'axiome d'Archimède est équivalent à une des deux propriétés suivantes :
(i) la suite $(n\,\mathbb{1})_{n\geq 0}$ n'est pas bornée
(ii) la suite $(n\,\mathbb{1})_{n\geq 0}$ admet $+\infty$ comme limite

Puisque la suite $(n\,\mathbb{1})_{n\geq 0}$ est croissante, les propriétés (i) et (ii) étaient équivalentes. Il reste à montrer leur équivalence à l'axiome d'Archimède.

Si l'axiome d'Archimède est vrai, prenons $x = \mathbb{1}$, alors quel que soit y positif, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\,\mathbb{1} \geq y$, ce qui signifie que la suite $(n\,\mathbb{1})_{n\geq 0}$ n'est pas majorée.

Si la suite $(n\,\mathbb{1})_{n\geq 0}$ admet $+\infty$ comme limite, alors si $x > 0$, la suite $(nx)_{n\geq 0}$ admet $+\infty$ comme limite, et donc n'est pas bornée. Il en résulte que, quel que soit $y \geq 0$, il existe n tel que $nx \geq y$.

III. Le corps des nombres réels

Théorème 1 Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif totalement ordonné. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) toute suite croissante majorée converge,
(i') toute suite décroissante minorée converge,
(ii) tout ensemble majoré possède une borne supérieure,
(ii') tout ensemble minoré possède une borne inférieure,
(iii) toute suite de Cauchy converge et $\mathbb{K}$ est archimédien,
(iv) de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente (Propriété de Bolzano-Weierstrass),
(v) toutes suites adjacentes convergent et $\mathbb{K}$ est archimédien,

On remarque tout d'abord l'équivalence des propriétés (i) et (i') ainsi que celle des propriétés (ii) et (ii').

$\boxed{\text{(v)} \Rightarrow \text{(ii)}}$

Soit A un ensemble non vide majoré. Notons a_0 un de ses éléments et M_0 un de ses majorants, et construisons par récurrence deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(M_n)_{n\geq 0}$ telles que la première soit une suite croissante d'éléments de A et la seconde une suite décroissante de majorants de A, vérifiant de plus, pour tout entier $n \geq 0$,

$$0 \leq M_n - a_n \leq \frac{M_0 - a_0}{2^n}\,.$$

Supposons les suites construites jusqu'au rang n et construisons les au rang $n+1$. Pour cela regardons $\lambda_n = (M_n + a_n)/2$. C'est un nombre compris entre a_n et M_n. Deux cas sont possibles :

1) λ_n est un majorant de A. Dans ce cas, on pose

$$M_{n+1} = \lambda_n \quad \text{et} \quad a_{n+1} = a_n\,.$$

On a alors

$$a_{n+1} = a_n \leq \lambda_n = M_{n+1} \leq M_n\,.$$

Par ailleurs

$$M_{n+1} - a_{n+1} = \frac{M_n - a_n}{2} \leq \frac{M_0 - a_0}{2^{n+1}}\,.$$

2) λ_n n'est pas un majorant de A. Il existe un élément a_{n+1} de A tel que

$$a_{n+1} \geq \lambda_n\,,$$

et l'on pose

$$M_{n+1} = M_n\,.$$

Donc, puisque M_{n+1} est un majorant de A, et que a_{n+1} appartient à A,

$$a_n \leq \lambda_n \leq a_{n+1} \leq M_{n+1} = M_n\,.$$

Par ailleurs

$$M_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{M_n - a_n}{2} \leq \frac{M_0 - a_0}{2^{n+1}}\,.$$

On construit bien ainsi deux suites répondant à la question.

Comme le corps est archimédien, la suite (n) admet pour limite $+\infty$. Alors la suite $(1/n)$ admet pour limite 0, et la suite $(1/2^n)$, qui est une suite extraite, converge aussi vers 0. Il en résulte que les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(M_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite β. On a pour tout x de A, et pour tout entier n

$$x \leq M_n\,,$$

donc par passage à la limite

$$x \leq \beta\,,$$

et β est un majorant de A. Mais par ailleurs β est limite d'une suite a_n d'éléments de A. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément a_n de la suite tel que $\beta - \varepsilon < a_n$. Donc β est la borne supérieure de A.

CQ 14

$\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(i)}}$

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante majorée. L'ensemble $A = \{u_n \,|\, n \geq 0\}$ est majoré donc possède une borne supérieure ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$ il existe N, tel que
$$\ell - \varepsilon \leq u_N \,.$$
Alors, si $n \geq N$, comme la suite est croissante,
$$\ell - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \,.$$
Par ailleurs, comme ℓ est un majorant de la suite, on a pour tout entier n
$$u_n \leq \ell \,.$$
Il en résulte que, si $n \geq N$,
$$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell, ,$$
donc
$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon \,.$$
On en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ .

$\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(v)}}$

Supposons que la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est croissante, et que la suite $v = (v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante. La suite $v - u$ est convergente, donc bornée inférieurement par une constante a. Pour tout entier n,
$$v_n - u_n \geq a \,.$$
Comme v décroit, on a
$$u_n \leq v_n - a \leq v_0 - a \,.$$
La suite u est donc majorée. Il en résulte qu'elle converge vers une limite ℓ.

De même, comme u est croissante
$$v_n \geq a + u_n \geq a + u_0 \,,$$
et la suite v est minorée. Il en résulte qu'elle converge vers une limite ℓ'.

Mais alors $v - u$ converge vers $\ell - \ell' = 0$.

Par ailleurs, si la suite $(u_n) = (n\,\mathbb{1})$ était majorée, comme elle est croissante elle admettrait une limite ℓ. Mais on a la relation
$$u_{n+1} = u_n + \mathbb{1} \,,$$
et par passage à la limite, on en déduirait
$$\ell = \ell + \mathbb{1}$$

d'où une contradiction. Il en résulte que le corps est archimédien.

On a donc l'équivalence des propriétés (i), (i'), (ii), (ii') et (v).

$\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(iv)}}$

Montrons tout d'abord que de toute suite de $\mathbb{K}$, on peut extraire une suite monotone.

Soit u une suite de $\mathbb{K}$. Appelons indice-pic un entier n tel que, pour tout $m > n$, on ait $u_m < u_n$. Il y a alors deux cas possibles.

Premier cas : il existe une infinité d'indices-pics.

On peut les ranger dans un ordre croissant $(p_0, p_1, \dots, p_n, \dots)$. On définit une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = p_n$. Cette application est strictement croissante, car

$$\varphi(n) = p_n < p_{n+1} = \varphi(n+1)\,,$$

et puisque p_n est un indice-pic, on en déduit que

$$u_{\varphi(n)} > u_{\varphi(n+1)}\,.$$

La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ est donc décroissante.

Deuxième cas : l'ensemble des indices pics est fini.

Si r est un majorant strict de cet ensemble posons, $p_0 = r$. Ce nombre n'est pas un indice-pic. Il existe donc un nombre $p_1 > p_0$ tel que $u_{p_1} \geq u_{p_0}$. De nouveau, puisque p_1 n'est pas un indice-pic, il existe un indice $p_2 > p_1$, tel que $u_{p_2} \geq u_{p_1}$. On voit qu'en poursuivant ce procédé, on construit une suite (p_n), telle que, pour tout entier naturel n

$$p_{n+1} > p_n \quad \text{et} \quad u_{p_{n+1}} \geq u_{p_n}\,.$$

On définit une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = p_n$. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ est alors croissante.

Il en résulte que si la suite de départ est bornée, la suite extraite est bornée et monotone, donc converge.

$\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)}}$

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante majorée. Supposons, par l'absurde, que ce ne soit pas une suite de Cauchy. Il existe donc un $\varepsilon > 0$, tel que, pour tout entier N, on puisse trouver, un entier $q \geq 0$, et un entier $p \geq N$, vérifiant

$$|u_{p+q} - u_p| \geq \varepsilon\,,$$

ou encore, en utilisant la croissance de la suite,

$$u_{p+q} \geq \varepsilon + u_p\,.$$

Nous allons construire par récurrence une suite φ strictement croissante de nombres entiers de telle sorte que, pour tout entier naturel n,

$$u_{\varphi(n)} \geq u_0 + n\varepsilon\,.$$

Posons $\varphi(0) = 0$, et supposons construits des nombres $\varphi(0),\ \ldots,\ \varphi(n)$, tels que

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n)\,,$$

avec, pour tout entier r compris entre 0 et n

$$u_{\varphi(r)} \geq u_0 + r\varepsilon\,.$$

Prenons $N = \varphi(n)$. Il existe un entier $q \geq 0$, et un entier $p \geq N$, vérifiant

$$u_{p+q} \geq \varepsilon + u_p\,.$$

Posons $\varphi(n+1) = p + q$. On a nécessairement $q \neq 0$ et

$$\varphi(n+1) = p + q > p \geq \varphi(n)\,.$$

Par ailleurs, $p \geq \varphi(n)$ et la suite u est croissante, donc

$$u_p \geq u_{\varphi(n)}\,.$$

Alors,

$$u_{\varphi(n+1)} \geq \varepsilon + u_p \geq \varepsilon + u_{\varphi(n)} \geq \varepsilon + (u_0 + n\varepsilon)\,.$$

On en déduit que

$$u_{\varphi(n+1)} \geq u_0 + (n+1)\varepsilon\,.$$

Ainsi construit, $u_{\varphi(n+1)}$ possède bien les propriétés requises. Mais, sachant que la suite $(n\,\mathbb{1})_{n\geq 0}$ n'est pas majorée, l'inégalité

$$u_{\varphi(n)} \geq u_0 + n\varepsilon\,,$$

montre que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ n'est pas majorée. Comme c'est une suite extraite de u, on obtient une contradiction. Il en résulte que toute suite croissante et majorée est une suite de Cauchy, et donc qu'elle converge.

$\boxed{\text{(iv)} \Rightarrow \text{(iii)}}$

Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy. Elle est donc bornée, et on peut en extraire une suite convergente $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$. Alors la suite u converge aussi vers ℓ.

Supposons la suite $(n\,\mathbb{1})$ bornée. Alors on peut en extraire une suite convergente, et la suite $(n\,\mathbb{1})$ converge vers la même limite. On a vu plus haut que cela impliquait une contradiction. Donc $\mathbb{K}$ est archimédien.

On a l'équivalence des propriétés (i), (iii), (iv).

Théorème 2 Tout corps commutatif totalement ordonné et possédant une des propriété du théorème1 précédent est isomorphe à $\mathbb{R}$.

On a déjà vu qu'un tel corps possède un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$. Plus précisément, si p/q est un nombre rationnel, et si l'on pose

$$\sigma(p/q) = (p\,\mathbb{1})(q\,\mathbb{1})^{-1}\,,$$

l'application σ est un morphisme de corps totalement ordonnés.

Soit maintenant un nombre réel x strictement positif et q un nombre rationnel supérieur à x. Le nombre x est limite d'une suite (x_n) croissante de nombres rationnels strictement positifs. La suite $(\sigma(x_n))$ de $\mathbb{K}$ est une suite croissante majorée par $q\,\mathbb{1}$. Elle converge donc dans $\mathbb{K}$. Notons ℓ sa limite. Si maintenant (y_n) est une autre suite croissante de nombres rationnels qui converge vers x, la suite $(\sigma(y_n))$ de $\mathbb{K}$ converge vers ℓ'. On peut alors former une suite croissante (z_n) dont (x_n) et (y_n) sont des sous-suites. La suite $(\sigma(z_n))$ de $\mathbb{K}$ converge vers ℓ''. Mais alors $(\sigma(x_n))$ et $(\sigma(y_n))$ sont des sous-suites de $(\sigma(z_n))$ et $\ell = \ell' = \ell''$. La valeur obtenue ne dépend pas de la suite choisie. On peut donc poser

$$\sigma'(x) = \lim \sigma(x_n)\,.$$

On pose aussi $\sigma'(0) = 0$, et, si x est négatif

$$\sigma'(x) = -\sigma'(-x)\,.$$

On définit ainsi une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. On remarque que si x est rationnel positif, on peut prendre la suite constante (x), et alors $\sigma'(x) = \sigma(x)$. L'application obtenue est donc un prolongement de σ et on la notera également σ.

Il reste à vérifier les propriétés (i)' à (iv)' des morphismes de corps ordonnés de la proposition 6. (La propriété (i)" est vérifiée par définition).

Propriétés (i') et (ii')

Soit x et y deux nombres réels strictement positifs limites des suites croissantes (x_n) et (y_n) de nombres rationnels. Alors $x+y$ et xy sont limites des suites croissantes (x_n+y_n) et (x_ny_n) de nombres rationnels, donc

$$\sigma(x+y) = \lim \sigma(x_n+y_n) = \lim \sigma(x_n) + \lim \sigma(y_n) = \sigma(x) + \sigma(y)\,,$$

et

$$\sigma(xy) = \lim \sigma(x_ny_n) = \lim \sigma(x_n) \lim \sigma(y_n) = \sigma(x)\sigma(y)\,.$$

$\boxed{\text{Propriétés (iv') et (iii')}}$

Soit $x > 0$, et (x_n) une suite croissante de nombres rationnels de limite x. Alors, à partir d'un certain rang n_0, le nombre x_n est strictement positif. Donc

$$0 < \sigma(x_0) \leq \sigma(x)\,.$$

En particulier

$$\sigma(1) = \mathbb{1} > 0\,,$$

et $\mathbb{1}$ est inversible.

$\boxed{\text{Bijectivité}}$

On déduit de (iv') que $\sigma(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ et σ est injective.
Soit maintenant x un élément de $\mathbb{K}^{*+}$. Si x était un majorant de $\mathbb{K}$, ce serait un majorant de $\sigma(\mathbb{N})$ et $\mathbb{K}$ ne serait pas archimédien. Donc, il existe b dans $\mathbb{N}$ tels que $0 \leq x \leq b\,\mathbb{1} = \sigma(b)$.

On construit alors par dichotomie deux suites (a_n) et (b_n) de $\mathbb{Q}$, l'une croissante, l'autre décroissante telles que, pour tout entier n,

$$\sigma(a_n) \leq x \leq \sigma(b_n) \quad \text{et} \quad b_n - a_n \leq b/2^n\,.$$

En effet, à partir de a_n et b_n, on regarde $(a_n + b_n)/2$, et l'on pose

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left\{ \begin{array}{ll} (a_n, (a_n + b_n)/2) & \text{si } (a_n + b_n)/2 \geq x \\ ((a_n + b_n)/2, b_n) & \text{si } (a_n + b_n)/2 < x \end{array} \right. .$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes dans $\mathbb{R}$ et convergent vers la même limite h, et par définition $\sigma(h)$ est la limite de la suite $(\sigma(a_n))$.

D'autre part les suites $(\sigma(a_n))$ et $(\sigma(b_n))$ sont également adjacentes dans $\mathbb{K}$ et convergent vers la même limite. Mais puisque $\sigma(a_n) \leq x \leq \sigma(b_n)$ cette limite vaut x. Alors $x = \sigma(h)$.

Enfin, si $x < 0$, et si $-x = \sigma(k)$, on a $x = \sigma(-k)$. L'application σ est donc surjective.

IV. Exemple d'un corps totalement ordonné non archimédien

Considérons le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$. Si P est une fraction rationnelle non nulle, notons $\varphi(P)$ le rapport des coefficients des termes de plus haut degré, et posons $\varphi(0) = 0$, on a donc en particulier

$$\varphi(P) = \lim_{x \to +\infty} P(x)\, x^{-\deg P}\,,$$

et, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$P(x) \sim \varphi(P) x^{\deg P}\,.$$

Soit alors $\mathbb{K}^+ = \{P \in \mathbb{K} \,|\, \varphi(P) \geq 0\}$. Cet ensemble vérifie les conditions de la proposition 3, et permet donc d'ordonner le corps $\mathbb{K}$.

Vérifions les diverses conditions de stabilité :

Soit P et Q deux fractions rationnelles non nulles de $\mathbb{K}^+$. Comme les fonctions associées sont positives à $+\infty$, on a

$$P(x) + Q(x) \sim \varphi(P)x^{\deg P} + \varphi(Q)x^{\deg Q} \ .$$

On forme alors facilement le tableau suivant :

	$\varphi(P+Q)$	$\deg(P+Q)$
$\deg P > \deg Q$	$\varphi(P)$	$\deg P$
$\deg P < \deg Q$	$\varphi(Q)$	$\deg Q$
$\deg P = \deg Q$	$\varphi(P) + \varphi(Q)$	$\deg P = \deg Q$

qui montre que la somme de deux éléments non nuls de $\mathbb{K}^+$ appartient à $\mathbb{K}^+$, résultat qui est évident si P ou Q est nul. L'ensemble $\mathbb{K}^+$ est donc stable par addition.

On a aussi

$$P(x)Q(x) \sim \varphi(P)x^{\deg P}\varphi(Q)x^{\deg Q} = \varphi(P)\varphi(Q)x^{\deg P + \deg Q} = \varphi(P)\varphi(Q)x^{\deg(PQ)} \ ,$$

donc

$$\varphi(PQ) = \varphi(P)\,\varphi(Q) > 0\,,$$

et $\mathbb{K}^+$ est stable par multiplication.

Enfin

$$\varphi(-P) = -\varphi(P)\,.$$

Donc si P est non nul, une et une seule des deux fractions P ou $-P$ est dans $\mathbb{K}^+$.

Par contre, la relation d'ordre ainsi définie n'est pas archimédienne. En effet, pour tout entier n, on a

$$nX \leq X^2\,,$$

puisque

$$\varphi(X^2 - nX) = 1 > 0\,.$$

Remarque : sur $\mathbb{R}$, considéré comme sous-corps de $\mathbb{K}$, la relation d'ordre redonne la relation usuelle.

PROPOSITION 11 L'application degré est croissante sur $\mathbb{K}^+$: si $0 \leq P \leq Q$, alors $\deg P \leq \deg Q$. Inversement, si P et Q sont dans $\mathbb{K}^+$, et si $\deg P < \deg Q$, alors $P \leq Q$.

Supposons que $\deg Q < \deg P$. Alors $\deg(P - Q) = \deg P$, et comme $\varphi(Q - P)$ et $\varphi(P)$ sont positifs, on en déduit que

$$\deg(Q) = \deg(Q - P + P) = \deg(Q - P) = \deg(P)\,,$$

d'où une contradiction.

Inversement, si $\deg P < \deg Q$, alors

$$\deg(Q - P) = \deg Q\,.$$

le coefficient du terme de plus haut degré de $Q - P$ est celui de Q donc positif, et l'on a bien

$$P \leq Q\,.$$

Remarque : le résultat est faux, si P n'est pas dans $\mathbb{K}^+$. Par exemple

$$-X^2 \leq X\,.$$

Proposition 12 Une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{K}^*$ converge vers 0, si et seulement la suite $(\deg P_n)_{n\geq 0}$ admet $-\infty$ comme limite.

Si la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0, prenons $\varepsilon = 1/X^p$. Il existe un entier N, tel que $n \geq N$ implique $|P_n| < \varepsilon$. Si l'on pose $P_n = Q_n/R_n$ où le coefficient du terme de plus haut degré de R_n vaut 1, la condition s'écrit

$$-\frac{1}{X^p} < \frac{Q_n}{R_n} < \frac{1}{X^p}\,,$$

ou encore

$$\frac{1}{X^p} \pm \frac{Q_n}{R_n} = \frac{R_n \pm Q_n X^p}{X^p R_n} > 0\,.$$

Ou bien le coefficient du terme de plus haut degré de Q_n est négatif, ou bien c'est celui de $-Q_n$. Il en résulte que si le coefficient du terme de plus haut degré de $R_n \pm Q_n X^p$ est positif, le degré de R_n est nécessairement supérieur à celui de $Q_n X^p$ c'est-à-dire

$$\deg P_n \leq -p\,.$$

Donc, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, il existe un entier N, tel que $n \geq N$ implique

$$\deg P_n \leq -p\,.$$

La suite $(\deg P_n)_{n\geq 0}$ admet $-\infty$ comme limite.

Réciproquement, supposons que la suite $(\deg P_n)_{n\geq 0}$ admette $-\infty$ comme limite.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque l'application degré est croissante sur $\mathbb{K}^+$, on a

$$\varepsilon \geq X^{\deg \varepsilon - 1}\,.$$

Posons alors
$$p = \deg \varepsilon - 1\,.$$
Il existe un entier N, tel que $n \geq N$ implique
$$\deg P_n < -p\,.$$
Alors le coefficient du terme de plus haut degré de $R_n \pm Q_n X^p$ est celui de R_n et vaut 1. Donc
$$\frac{1}{X^p} \pm \frac{Q_n}{R_n} = \frac{R_n \pm Q_n X^p}{X^p R_n} > 0\,,$$
c'est-à-dire
$$|P_n| < 1/X^p \leq \varepsilon\,.$$
La suite (P_n) converge donc vers 0.

En particulier la suite $(1/X^n)$ converge vers 0, mais aussi (n/X^n). Par contre la suite $(1/n)$ ne converge pas vers 0.

On peut alors définir une métrique sur $\mathbb{K}$, en posant
$$d(P - Q) = 2^{\deg(P-Q)}\,,$$
et la convergence pour cette métrique est équivalente à la convergence dans le corps totalement ordonné. (C'est une distance ultramétrique).